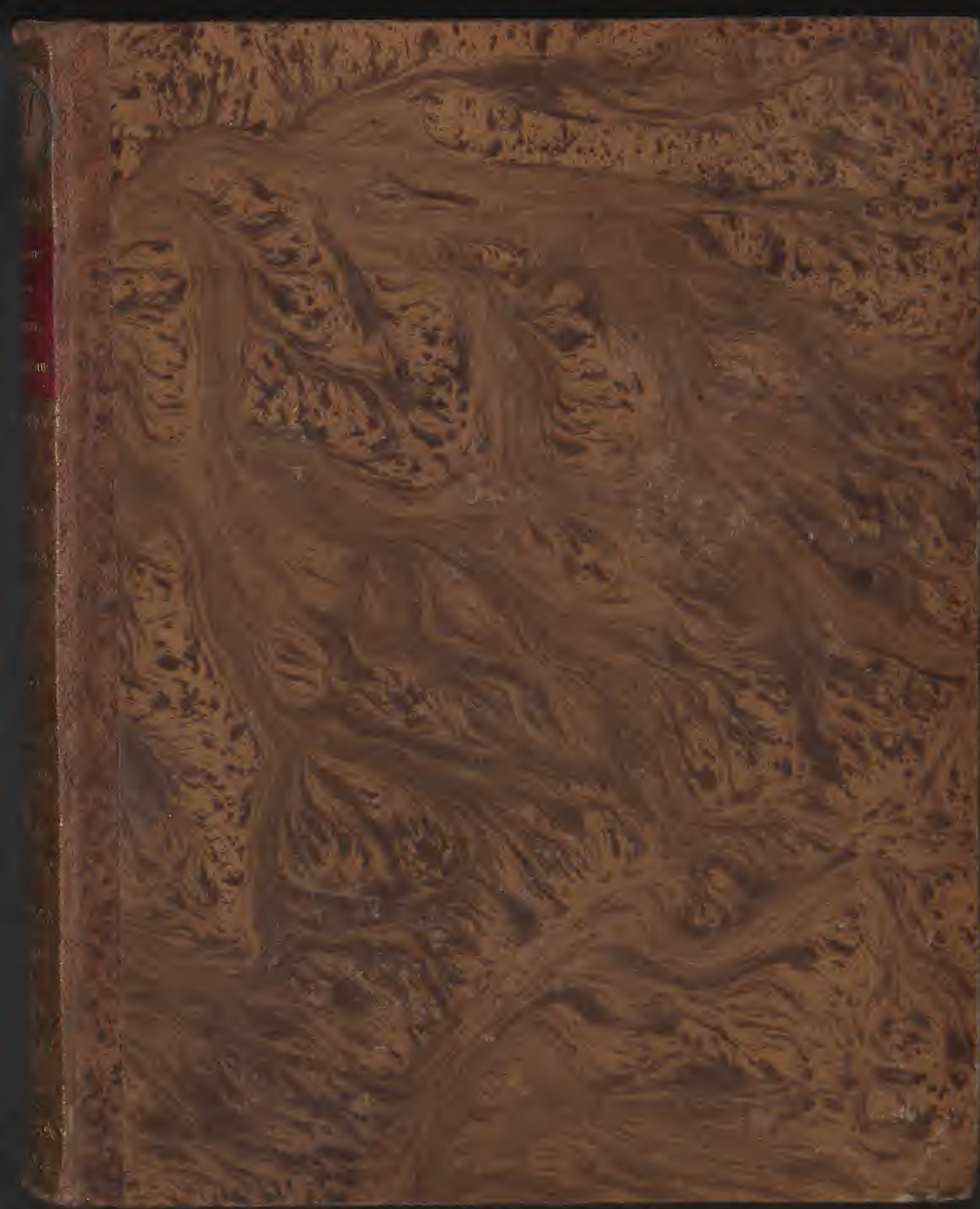



REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
Plana. III 91

MÉMOIRE

SUR

LE CALCUL NUMÉRIQUE DES INTÉGRALES DÉFINIES.



MÉMOIRE

Sur le calcul numérique des Intégrales définies.

PAR M. POISSON.

Lu à l'Académie des Sciences, le 11 décembre 1826.

Le calcul des intégrales définies est peut-être la partie de l'analyse dont les applications sont les plus nombreuses et les plus variées. Non-seulement elles comprennent la rectification des courbes, l'évaluation des surfaces et des solides, la détermination des centres de gravité, mais encore, la plupart des problèmes de mécanique ou de physique qui se résolvent par le calcul intégral, conduisent à des expressions des inconnues en intégrales définies. Aussi, depuis Euler et surtout dans ces derniers temps, les géomètres se sont-ils beaucoup occupés d'étendre et de perfectionner cet important calcul. Dans le petit nombre de cas où l'intégrale générale est connue sous forme finie, on en déduit immédiatement l'intégrale définie; dans d'autres cas, beaucoup plus étendus, on parvient à trouver la valeur exacte de l'une sans connaître celle de l'autre; mais le plus souvent on est

obligé de recourir aux méthodes d'approximation. Celles-ci consistent en des moyens particuliers à quelques intégrales, d'après lesquels on parvient à les faire dépendre les unes des autres et à les réduire en tables, ainsi que M. Legendre l'a pratiqué à l'égard des *transcendantes elliptiques* et de deux autres classes d'intégrales que notre confrère a nommées *Eulériennes*. Quelquefois aussi, on peut réduire la quantité soumise à l'intégration, en une série convergente dont les termes sont intégrables par les règles ordinaires. Mais quand toutes ces ressources manquent, on emploie un procédé général de calcul, fondé sur la nature même des intégrales, et que l'on appelle proprement *la méthode des quadratures*; dénomination qui lui vient de ce que le problème est le même que celui de trouver l'aire d'une courbe plane, ou le côté du carré équivalent. C'est cette méthode, envisagée sous un nouveau point de vue, qui est l'objet principal de ce Mémoire.

---

(1) Une intégrale définie est la somme des valeurs de la différentielle, comprises entre les limites de l'intégration, et supposées toutes infiniment petites, ce qui ne souffre d'exception que quand le coëfficient différentiel devient infini entre ces limites. Il en résulte que si l'on prend seulement un grand nombre de ces valeurs, et qu'on y remplace la différentielle de la variable par sa différence finie, on aura une valeur de l'intégrale, d'autant plus approchée que cette différence sera plus petite; et la méthode dont nous allons nous occuper, consiste à trouver, exactement ou par approximation, la correction qu'il faudra faire subir à ce premier résultat.

Nous supposerons les valeurs de la variable qui répondent aux deux limites de l'intégrale, égales et de signes contraires, ce qu'on peut toujours obtenir en augmentant ou diminuant la variable d'une quantité constante. Nous désignerons ces limites par $\pm a$; et pour les indiquer en même temps que l'intégrale, nous emploierons la notation très-commode que M. Fourrier a proposée. Ainsi

$$\int_{-a}^{a} fx\,dx,$$

désignera l'intégrale de $fx\,dx$, prise depuis $x = -a$ jusqu'à $x = +a$; fx étant une fonction donnée qui ne devient pas infinie entre ces limites.

Partageons a en un nombre n de parties égales; soit ω la grandeur de chacune d'elles, en sorte qu'on ait $a = n\omega$; faisons, pour abréger,

$$\tfrac{1}{2}f(-n\omega) + f(-n\omega + \omega) + f(-n\omega + 2\omega) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + f(n\omega - 2\omega) + f(n\omega - \omega) + f(n\omega) = \mathrm{P}_n:$$

en remplaçant dx par ω, on pourra prendre, d'après le principe précédent, $\omega\mathrm{P}_n$ pour la valeur approchée de notre intégrale; et si l'on désigne par Q_n la correction dont elle est susceptible, on aura exactement

$$\int_{-a}^{a} fx\,dx = \omega\mathrm{P}_n + \mathrm{Q}_n. \qquad (1)$$

Au lieu de ne faire entrer dans P_n, qu'une seule des deux valeurs extrêmes de fx, on a pris, pour la symétrie du calcul, la moitié de chacune d'elles; ce qui est permis tant que

la correction Q_n n'est pas déterminée. Il s'agit maintenant de trouver la valeur inconnue de cette quantité, en fonction du nombre n, ou de la différence ω.

(2) Pour y parvenir, je ferai usage de la formule :

$$fx = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} fx'dx' + \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\left[\sum_{1}^{\infty}\cos.\frac{i\pi(x-x')}{a}\right]fx'dx', \quad (2)$$

qui se trouve dans mon dernier Mémoire sur les intégrales définies, inséré dans le dix-neuvième cahier du journal de l'École Polytechnique. Elle représente fx pour toutes les valeurs de $x > -a$ et $< a$; à chacune des valeurs extrêmes $x = \pm a$, le second membre de cette équation est égal à la demi-somme des valeurs correspondantes de fx, c'est-à-dire, qu'il faut joindre à l'équation (2), celle-ci :

$$\frac{1}{2}[fa + f(-a)] = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} fx'dx' + \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\left[\sum_{1}^{\infty}\cos.\frac{i\pi(a-x')}{a}\right]fx'dx'. \quad (3)$$

On représente, à l'ordinaire, par π le rapport de la circonférence au diamètre; i est un nombre entier et positif, et la somme comprise sous les signes $\int$, s'étend, comme l'indique la notation $\sum_{1}^{\infty}$, à toutes les valeurs de i depuis $i = 1$ jusqu'à $i = \infty$. Mais avant d'employer ces équations, il convient de rappeler la démonstration que j'en ai donnée, en regardant chacune des séries périodiques qu'elles renferment, comme la limite d'une autre série convergente.

Soit donc α une quantité positive et moindre que l'unité.

Considérons l'expression

$$X = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} fx'\,dx' + \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\left[\sum_{1}^{\infty} \alpha^i \cos.\frac{i\pi(x-x')}{a}\right] fx'\,dx';$$

le second membre de l'équation (2) sera la valeur de X qui répond à la limite où la différence $1-\alpha$ est infiniment petite; ainsi il s'agit de faire voir qu'à cette limite on a $X = fx$, pour $x > -a$ et $< a$.

Or, en développant suivant les puissances de α, on a, en série convergente,

$$\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos.\frac{\pi(x-x')}{a}+\alpha^2} = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} \alpha^i \cos.\frac{i\pi(x-x')}{a};$$

on aura donc

$$X = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} \frac{(1-\alpha^2) fx'\,dx'}{1-2\alpha\cos.\frac{\pi(x-x')}{a}+\alpha^2}.$$

Le coëfficient de dx' sous le signe intégral, devient infiniment petit en même temps que $1-\alpha$, excepté pour les valeurs de x' qui rendent $\cos.\frac{\pi(x-x')}{a}$ infiniment peu différent de l'unité, et, par conséquent, le dénominateur aussi infiniment petit. Mais x étant $> -a$ et $< a$, et la variable x' ne sortant pas non plus de ces limites, cette circonstance ne peut avoir lieu que pour des valeurs de $x'-x$, infiniment petites, positives ou négatives; il suffira donc d'étendre l'intégrale aux valeurs de x' infiniment peu différentes de x; et dans cette étendue, on pourra considérer la fonction fx'

comme constante et égale à fx. Si donc on fait

$$1-\alpha=g, \quad x'=x+h, \quad dx'=dh,$$

et que l'on traite g et h comme des quantités infiniment petites, on aura pour la limite demandée :

$$X=\frac{fx}{a}\int\frac{g\,dh}{g^2+\frac{\pi^2 h^2}{a^2}}.$$

Comme cette dernière intégrale est infiniment petite, pour toute valeur finie de la variable, on pourra l'étendre à des valeurs de h aussi grandes que l'on voudra; en désignant donc par δ une quantité positive et finie, dont la grandeur est arbitraire, et intégrant depuis $h=-\delta$ jusqu'à $h=+\delta$, nous aurons

$$X=\frac{2fx}{\pi}\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\delta}{g}\right);$$

quantité qui se réduit à $X=fx$, à cause de g infiniment petit; ce qu'il s'agissait de démontrer.

Dans le cas de $x=a$, on rendra cos. $\frac{\pi(x-x')}{a}$ infiniment peu différent de l'unité, en supposant successivement $x'=a+h$ et $x'=-a+h$, et traitant toujours h comme une variable infiniment petite; mais pour que x' ne sorte pas des limites $\pm a$, il faudra n'intégrer que depuis $h=-\delta$ jusqu'à $h=0$ dans la première hypothèse, et depuis $h=0$ jusqu'à $h=+\delta$ dans la seconde; ce qui réduira chaque portion d'intégrale à la moitié de la valeur précédente. Alors on aura, dans ce cas,

$$X=\tfrac{1}{2}[fa+f(-a)],$$

pour la limite de X; et l'on trouvera le même résultat dans le cas de $x = -a$; ce qui coïncide avec l'équation (3).

(3) Maintenant, pour faire de l'équation (2) l'usage que nous avons en vue, mettons-y $n\omega$ à la place de a; puis donnons successivement à x, ces $2n-1$ valeurs équi-différentes :

$$-(n-1)\omega, -(n-2)\omega \ldots -\omega, 0, +\omega, \ldots (n-2)\omega, (n-1)\omega,$$

pour lesquelles cette équation subsiste. En prenant la somme des résultats, et ajoutant la demi-somme des valeurs de fx relatives à $\pi = \pm a$, on en conclura

$$\omega P_n = \frac{\omega}{2}[fa + f(-a)] + \frac{2n-1}{2n}\int_{-a}^{a} fx'\,dx'$$
$$+ \frac{1}{n}\int_{-a}^{a}\left[\Sigma_0^\infty p \cos.\frac{i\pi x'}{n\omega}\right] fx'\,dx',$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$p = 1 + 2\cos.\frac{i\pi}{n} + 2\cos.\frac{2i\pi}{n} + 2\cos.\frac{3i\pi}{n} + \ldots + 2\cos.\frac{(n-1)i\pi}{n}.$$

Cette quantité p est évidemment égale à $2n-1$ toutes les fois que i est un multiple de $2n$. Si on la multiplie par $\cos.\frac{i\pi}{n}$, on trouve, en réduisant,

$$p\cos.\frac{i\pi}{n} = p + \cos.i\pi - \cos.\frac{(n-1)i\pi}{n};$$

d'où l'on tire $p = -\cos.i\pi$, pour les autres valeurs de i. D'après cela, je prends d'abord la somme Σ_1^∞ en supposant

que cette dernière valeur de p ait lieu sans exception; ensuite, je fais $i=2i'n$, et je prends une seconde somme $\sum_1^\infty$ relative à i', en supposant que $2n-1+\cos.2i'n\pi$, ou $2n$, soit la valeur de p: la série périodique, contenue sous le signe intégral, se composera évidemment de ces deux séries ainsi calculées; et en faisant attention qu'on a

$$\cos.i\pi\cos.\frac{i\pi x'}{n\omega}=\cos.\frac{i\pi(a-x')}{a},$$

on en conclura

$$\sum_1^\infty p\cos.\frac{i\pi x'}{n\omega}=-\sum_1^\infty \cos.\frac{i\pi(a-x')}{a}+2n\sum_1^\infty \cos.\frac{2i'\pi x'}{\omega}.$$

De cette manière, la valeur précédente de ωP_n deviendra

$$\omega P_n=\frac{\omega}{2}[fa+f(-a)]+\left(1-\frac{\omega}{a}\right)\int_{-a}^{a}fx'dx'$$

$$-\frac{\omega}{a}\int_{-a}^{a}\left[\sum_1^\infty \cos.\frac{i\pi(a-x')}{a}\right]fx'dx'+2\int_{-a}^{a}\left[\sum_1^\infty \cos.\frac{2i'\pi x'}{\omega}\right]fx'dx'.$$

En ayant égard à l'équation (3), celle-ci se réduit à

$$\omega P_n=\int_{-a}^{a}fx'dx'+2\int_{-a}^{a}\left[\sum_1^\infty \cos.\frac{2i'\pi x'}{\omega}\right]fx'dx';$$

et si l'on y remplace x' et i' par x et i, et qu'on la compare à l'équation (1), il en résultera

$$Q_n=-2\int_{-a}^{a}\left[\sum_1^\infty \cos.\frac{2i\pi x}{\omega}\right]fx\,dx.$$

Ainsi la correction qu'on doit faire subir à la première valeur approchée de notre intégrale, se trouve exprimée par une autre intégrale définie; mais, par le procédé de l'intégration par partie, celle-ci se réduit en une série ordonnée suivant les puissances de ω, dont il suffira généralement de considérer les premiers termes.

(4) Soit, pour cela,

$$1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}(2\pi)^{2m} A_m;$$

la série se prolongeant à l'infini, m étant un nombre entier, et A_m un coëfficient dont la valeur exacte est connue pour toutes les valeurs de m. En intégrant $2m - 1$ fois de suite par partie, et observant qu'aux limites $\pm a$, ou $\pm n\omega$, on a

$$\cos. \frac{2i\pi x}{\omega} = 1, \quad \sin. \frac{2i\pi x}{\omega} = 0,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} Q_n = &- \omega^2 \left(\left[\frac{dfx}{dx}\right] - \left(\frac{dfx}{dx}\right) \right) A_1 \\ &+ \omega^4 \left(\left[\frac{d^3 fx}{dx^3}\right] - \left(\frac{d^3 fx}{dx^3}\right) \right) A_2 \\ &- \omega^6 \left(\left[\frac{d^5 fx}{dx^5}\right] - \left(\frac{d^5 fx}{dx}\right) \right) A_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ (-1)^m \omega^{2m} \left(\left[\frac{d^{2m-1} fx}{dx^{2m-1}}\right] - \left(\frac{d^{2m-1} fx}{dx^{2m-1}}\right) \right) A_m + R_m: \end{aligned}$$

les différentielles comprises entre les parenthèses se rapportent à la première limite $x = -a$, celles qui sont renfermées entre des crochets répondent à la seconde $x = a$, et

l'on a fait, pour abréger,

$$R_m = -2(-1)^m \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{2m} \int_{-a}^{a} \left[\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{i^{2m}} \cos.\frac{2i\pi x}{\omega}\right] \frac{d^{2m} fx}{dx^{2m}} dx. \quad (4)$$

Maintenant, si l'on prolonge indéfiniment cette série, et qu'on néglige le reste R_m, l'équation (1) deviendra

$$\left.\begin{aligned} \int_{-a}^{a} fx\,dx = \omega P_n - \omega^2 \left(\left[\frac{dfx}{dx}\right] - \left(\frac{dfx}{dx}\right)\right) A_1 \\ + \omega^4 \left(\left[\frac{d^3fx}{dx^3}\right] - \left(\frac{d^3fx}{dx^3}\right)\right) A_2 \\ - \omega^6 \left(\left[\frac{d^5fx}{dx^5}\right] - \left(\frac{d^5fx}{dx^5}\right)\right) A_3 \\ + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Cette formule ne diffère pas essentiellement de celle qu'Euler a donnée pour le même objet dans son *Traité de calcul différentiel,* et qu'on peut regarder comme une des plus utiles dont il a enrichi l'analyse; mais la manière dont nous y sommes parvenus a l'avantage de faire connaître en même temps l'expression du reste R_m, que l'on néglige quand on s'arrête à un terme quelconque de la série infinie; expression dont il sera toujours facile d'assigner une limite supérieure à sa valeur exacte; ce qui permettra d'apprécier le degré de l'approximation. Il serait à désirer que l'on eût de semblables limites pour toutes les suites infinies dont on fait usage : Lagrange les a exprimées très-simplement dans le cas du théorème de Taylor; et récemment M. Laplace s'est occupé de questions analogues, relatives aux développements des coordonnées des planètes dans le mouvement elliptique, et d'une autre fonction qui se présente dans la théorie des perturbations.

(5) Les valeurs des coëfficients A_1, A_2, A_3, etc., sont connues, comme nous l'avons dit ; mais on peut aussi les déterminer au moyen de l'équation (5), en faisant une supposition sur le nombre n et sur la fonction fx. Le plus simple est de prendre $n=1$. On a alors

$$\omega=a, \quad P_n=\tfrac{1}{2}f(-a)+f0+\tfrac{1}{2}fa.$$

Si l'on désigne par e la base des logarithmes népériens, et qu'on fasse

$$fx=e^x,$$

on aura

$$\int_{-a}^{a} fx\,dx=e^a-e^{-a}, \quad P_n=\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}a}+e^{-\frac{1}{2}a}\right)^2,$$

et généralement

$$\left[\frac{d^{2m-1}fx}{dx^{2m-1}}\right]-\left(\frac{d^{2m-1}fx}{dx^{2m-1}}\right)=e^a-e^{-a};$$

au moyen de quoi, en divisant les deux membres de l'équation (5) par e^a-e^{-a}, on en conclura

$$\frac{a\left(e^{\frac{1}{2}a}+e^{-\frac{1}{2}a}\right)}{2\left(e^{\frac{1}{2}a}-e^{-\frac{1}{2}a}\right)}=1+a^2A_1-a^4A_2+a^6A_3-\text{etc.}$$

Or, le premier membre ne changeant pas quand on y change le signe de a, son développement ne renfermera que des puissances paires de a; d'ailleurs, les inconnues A_1, A_2, A_3, etc., sont indépendantes de a; il en résulte donc qu'après avoir développé le premier membre, les coëfficients de

$a^2, -a^4, a^6$, etc., seront les valeurs de ces quantités; ce qui était déja connu.

En supposant toujours $n=1$, $\omega=a$, et prenant

$$fx=x^{2m},$$

on aura, m étant un nombre entier,

$$\int_{-a}^{a} fx\,dx=\frac{2a^{2m+1}}{2m+1},\quad P_n=a^{2m};$$

d'après l'équation (4), le reste R_m sera nul; et en supprimant le facteur a^{2m+1} qui se trouvera commun à tous les termes de l'équation (5), il vient

$$\frac{2m-1}{2(2m+1)}=2m\,A_1-2m.2m-1.2m-2.A_2+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\pm 2m.2m-1.2m-2\ldots 3.2.A_m.$$

Cette relation connue entre les quantités A_1, A_2, A_3, etc., servira à les déterminer les unes au moyen des autres, en y faisant successivement $m=1$, $=2$, $=3$, etc. On trouve, de cette manière,

$$A_1=\frac{1}{12},\quad A_2=\frac{1}{720},\quad A_3=\frac{1}{30240},\ \text{etc.}$$

(6) Si l'on veut que l'intégrale proposée commence avec la variable, et soit prise depuis zéro jusqu'à une limite donnée c, on diminuera x de a, et l'on fera $2a=c$. Mettons ensuite fx à la place de $f(x-a)$, et n au lieu de $2n$; la différence ω sera la n.^{ième} partie de c; la quantité P_n se composera de $n+1$ termes, savoir :

$$P_n=\tfrac{1}{2}f0+f\omega+f2\omega+\ldots+f(n\omega-\omega)+\tfrac{1}{2}fc;$$

et si l'on substitue à la place de A_1, A_2, A_3, etc., leurs valeurs numériques, l'équation (5) deviendra

$$\left.\begin{aligned}\int_0^c fx\,dx = \omega P_n &- \frac{\omega^2}{12}\left(\left[\frac{dfx}{dx}\right] - \left(\frac{dfx}{dx}\right)\right)\\ &+ \frac{\omega^4}{720}\left(\left[\frac{d^3fx}{dx^3}\right] - \left(\frac{d^3fx}{dx^3}\right)\right)\\ &- \frac{\omega^6}{30240}\left(\left[\frac{d^5fx}{dx^5}\right] - \left(\frac{d^5fx}{dx^5}\right)\right)\\ &+ \text{etc.};\end{aligned}\right\} (6)$$

les différentielles comprises entre des parenthèses ou entre des crochets, répondant toujours, les premières à la première limite $x=0$, et les secondes à la seconde limite $x=c$.

A cause que a est un multiple de ω, le cosinus de $\frac{2i\pi n}{\omega}$ reste le même dans le changement de x en $x-a$; le reste R_m donné par l'équation (4), qu'il faut ajouter à cette série quand on s'arrête au n.^{ième} terme inclusivement, aura donc pour expression :

$$R_m = -2(-1)^m\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{2m}\int_0^c\left[\sum_1^\infty \frac{1}{i^{2m}}\cos.\frac{2i\pi x}{\omega}\right]\frac{d^{2m}fx}{dx^{2m}}\,dx. \quad (7)$$

En intégrant encore une fois, et observant que $\sin.\frac{2i\pi x}{\omega}$ est nul à la seconde limite $x=c=n\omega$, aussi bien qu'à la première $x=0$, on peut donner à R_m cette autre forme équivalente :

$$R_m = 2(-1)^m\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{2m+1}\int_0^c\left[\sum_1^\infty \frac{1}{i^{2m+1}}\sin.\frac{2i\pi x}{\omega}\right]\frac{d^{2m+1}fx\,dx}{dx^{2m+1}}. \quad (8)$$

Pour obtenir des limites de ces expressions, désignons par B_m et C_m des quantités connues, telles que l'on ait, abstraction faite du signe,

$$\frac{d^{2m}fx}{dx^{2m}} < B_m, \quad \frac{d^{2m+1}fx}{dx^{2m+1}} < C_m,$$

pour toutes les valeurs de x comprises depuis zéro jusqu'à c; soit, en outre,

$$1 + \frac{1}{2^{2m+1}} + \frac{1}{3^{2m+1}} + \frac{1}{4^{2m+1}} + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}(2\pi)^{2m+1} A'_m :$$

en observant qu'on a évidemmment

$$\sum_1^\infty \frac{1}{i^{2m}} \cos. \frac{2i\pi x}{\omega} < \tfrac{1}{2}(2\pi)^{2m} A_m,$$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{i^{2m+1}} \sin. \frac{2i\pi x}{\omega} < \tfrac{1}{2}(2\pi)^{2m+1} A'_m,$$

on en conclura, en grandeur absolue,

$$R_m < c\omega^{2m} A_m,$$

d'après la formule (7), et

$$R_m < c\omega^{2m+1} A'_m,$$

d'après la formule (8).

Ces limites montrent que pour une même valeur de m, ou pour un même nombre de termes de la série (6), l'approximation croîtra indéfiniment à mesure que ω diminuera; mais quel que soit ω, l'approximation ne croîtra pas de même

avec le nombre m, et il arrivera très-souvent qu'elle décroîtra au-delà d'un certain nombre de termes. C'est ce qui aura lieu quand les quantités B_m et C_m augmenteront plus rapidement avec m, que ω^{2m} ne diminuera, et alors la série (6), après avoir été convergente dans les premiers termes, deviendra divergente et par conséquent inexacte. Dans le cas de $c=\infty$, ces limites seront illusoires, et il en faudra déterminer d'autres, propres à chaque exemple particulier.

La valeur exacte de la quantité A'_m qui entre dans la seconde limite, n'est pas connue comme celle de A_m. On a fait usage de différentes méthodes pour calculer sa valeur approchée; nous indiquerons celle que fournit l'équation (6), en y faisant

$$fx=\frac{1}{(1+x)^{2m+1}}, \quad \omega=1, \quad c=\infty.$$

On a alors

$$\int_0^c fx\,dx=\frac{1}{2m}, \quad P_n=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(2\pi)^{2m+1}A'_m;$$

et quel que soit le nombre entier i, on a aussi

$$\left[\frac{d^{2i-1}fx}{dx^{2i-1}}\right]=0, \left(\frac{d^{2i-1}fx}{dx^{2i-1}}\right)=-2m+1.2m+2\ldots 2m+2i-1.$$

Au moyen de ces valeurs, on tire de l'équation (6) :

$$(2\pi)^{2m+1}A'_m=\frac{m+1}{m}+\frac{m+1}{6}-\frac{m+1.m+2.m+3}{360}$$
$$+\frac{m+1.m+2.m+3.m+4.m+5}{15120}-\text{etc.}$$

En appelant μ le nombre de termes de cette série que l'on

conservera, à partir du second, et M le reste qu'il y faudrait ajouter, on aura, d'après la formule (7) :

$$M = -(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2\mu}.m+1.m+2\ldots m+2\mu.\int_0^{\infty}\left[\sum\frac{1}{i^{2\mu}}\cos.2i\pi x\right]\frac{dx}{(1+x)^{m+2\mu}}.$$

Il sera alternativement positif et négatif, ce qui montre que la série précédente donnera des valeurs de A'_m, alternativement plus grandes et plus petites que la valeur exacte, et qui en différeront, par conséquent, d'une quantité moindre que le terme où l'on s'arrêtera.

(7) On peut éliminer les différentielles de la fonction fx qui sont contenues dans la formule (6), et les remplacer par ses différences finies.

En effet, soit

$$Fz = fz + f(c-z);$$

désignons par $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, etc., les différences successives de Fz, qui répondent à $z=0$, et sont prises en supposant $\Delta z = \omega$, de sorte qu'on ait

$$\Delta_1 = F2\omega - F0,$$
$$\Delta_2 = F2\omega - 2F\omega + F0,$$
$$\Delta_3 = F3\omega - 3F2\omega + 3F\omega - F0,$$
etc.;

nous aurons cette formule d'interpolation :

$$Fz = F0 + \frac{z}{\omega}\Delta_1 + \frac{z(z-\omega)}{2\omega^2}\Delta_2 + \frac{z(z-\omega)(z-2\omega)}{2.3.\omega^3}\Delta_3 + \text{etc.};$$

d'après les notations précédentes, on aura aussi

$$\left(\frac{d^{2m-1}fx}{dx^{2m-1}}\right) - \left[\frac{d^{2m-1}fx}{dx^{2m-1}}\right] = \frac{d^{2m-1}\mathrm{F}z}{dz^{2m-1}},$$

pourvu qu'on fasse $z=0$ après la différentiation : il en résultera

$$\omega\left(\left(\frac{dfx}{dx}\right) - \left[\frac{dfx}{dx}\right]\right) = \Delta_1 - \tfrac{1}{2}\Delta_2 + \tfrac{1}{3}\Delta_3 - \tfrac{1}{4}\Delta_4 + \text{etc.},$$

$$\omega^3\left(\left(\frac{d^3fx}{dx^3}\right) - \left[\frac{d^3fx}{dx^3}\right]\right) = \Delta_3 - \tfrac{3}{2}\Delta_4 + \text{etc.},$$

etc. ;

et en substituant ces valeurs dans l'équation (6), il vient

$$\int_0^c fx\,dx = \omega \mathrm{P}_n + \frac{\omega}{12}\Delta_1 - \frac{\omega}{24}\Delta_2 + \frac{19\,\omega}{720}\Delta_3 - \frac{3\,\omega}{160}\Delta_4 + \text{etc.} \quad (9).$$

En y faisant $\omega=1$, cette formule coïncide avec celle que M. Laplace a donnée dans le tome IV de la *Mécanique céleste*. Elle ne suppose pas connue l'expression de fx. Pour en faire usage, il suffira d'avoir un nombre $n+1$ de valeurs numériques de cette quantité, correspondantes à autant de valeurs équi-différentes de x : on ne pourra toutefois l'employer utilement que quand les différences Δ_1, Δ_2, Δ_3, etc., décroîtront très-rapidement.

La formule d'interpolation dont nous sommes partis, ne subsiste pas lorsque fx est une fonction périodique de $\sin. 2\pi x$ et $\cos. 2\pi x$, et que l'on prend $\omega=1$; car alors toutes les différences Δ_1, Δ_2, Δ_3, etc., qu'elle contient, seraient nulles, et l'on aurait $\mathrm{F}z=\mathrm{F}0$, ce qui n'est pas vrai. Il en résulte que l'équation (9) que nous en avons déduite, n'aura pas lieu non plus dans ce cas particulier ; mais on obvie à cet incon-

vénient en prenant une autre valeur pour la différence ω qui peut être aussi petite que l'on voudra.

(8) La formule d'Euler se trouve en défaut dans un autre cas, ainsi que M. Legendre en a fait la remarque à la fin de son traité des *Fonctions elliptiques* (1). Ce cas a lieu lorsque les différentielles impaires de fx s'évanouissent, ou, plus généralement, sont égales aux deux limites de l'intégrale que l'on considère. Quelle que soit la quantité ω, l'équation (6) se réduirait alors à

$$\int_0^c fx\,dx = \omega P_n;$$

d'où il résulterait que l'intégrale proposée s'exprimerait sous forme finie, et que sa valeur dépendrait du nombre arbitraire n, ce qui serait absurde. Mais ce résultat provient de ce que l'on a négligé le reste R_m, qui, dans ce cas particulier, au lieu de décroître à mesure que m augmente, est au contraire indépendant de la grandeur de ce nombre. En effet, en intégrant par partie, et observant qu'on a, par hypothèse,

$$\left(\frac{d^{2m+1}fx}{dx^{2m+1}}\right) = \left[\frac{d^{2m+1}fx}{dx^{2m+1}}\right],$$

la formule (8) donnera

$$R_m = 2(-1)^m \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{2m+2} \int_0^c \left[\sum_1^\infty \frac{1}{i^{2m+2}} \cos.\frac{2i\pi x}{\omega}\right] \frac{d^{2m+2}fx}{dx^{2m+2}}\,dx;$$

et si l'on compare cette expression à la formule (7) dans la-

(1) Tome II, page 578.

quelle on augmentera m d'une unité, on en conclura

$$R_{m+1}=R_m;$$

c'est-à-dire, que le reste R_m est constant par rapport au nombre m.

Dans ce cas singulier, si $\frac{\omega}{2\pi}$ est une fraction, le facteur $\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{2m}$ que ce reste renferme, diminue indéfiniment à mesure que m augmente; mais en même temps l'autre facteur augmente à raison des différentiations successives de fx, de telle sorte que le produit demeure constant. Cependant, il n'en sera pas de même à l'égard de la limite supérieure à R_m que l'on pourra assigner; elle dépendra de m, et décroîtra d'autant plus rapidement avec ω que ce nombre m sera plus grand.

(9) Nous choisirons pour exemple de cette anomalie, l'intégrale qui donne le quart de la circonférence d'une ellipse, que nous appellerons E. En prenant pour unité le demi-grand axe, et désignant l'excentricité par h, nous aurons alors

$$E=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1-h^2\sin.^2 x}\,dx;$$

on fera donc, dans l'équation (6),

$$c=\tfrac{1}{2}\pi,\quad fx=\sqrt{1-h^2\sin.^2 x};$$

et il est évident que toutes les différentielles impaires de fx seront nulles aux deux limites $x=0$ et $x=\frac{1}{2}\pi$, à cause du facteur $\sin. x \cos. x$ dont elles seront affectées.

Le coëfficient différentiel de fx, d'un ordre quelconque, se composera de termes dont les diviseurs seront les puissances impaires de fx, et qui ne renfermeront que des puissances entières de sin. $2x$ et cos. $2x$ à leurs numérateurs; on substituera facilement à chaque numérateur, une plus grande quantité abstraction faite du signe; prenant en outre, pour fx sa moindre valeur $\sqrt{1-h^2}$, on formera ainsi une quantité supérieure au coëfficient différentiel $\frac{d^{2m}fx}{dx^{2m}}$ qui entre dans la formule (7). Soit H cette quantité; en mettant aussi dans cette formule, $\frac{1}{2}(2\pi)^{2m}A_m$ à la place de la série qu'elle renferme, et pour ω sa valeur $\frac{\pi}{2n}$, nous en conclurons

$$R_m < \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2m} H A_m,$$

en grandeur absolue.

Appelons I le rayon du cercle dont la circonférence est équivalente à celle de l'ellipse que nous considérons, de sorte qu'on ait $E = \frac{1}{2}\pi I$. D'après la formule d'Euler, nous aurons cette valeur approchée :

$$I = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}f0 + f\frac{\pi}{2n} + f\frac{2\pi}{2n} + f\frac{3\pi}{2n} + \ldots + f\frac{(n-1)\pi}{2n} + \frac{1}{2}f\frac{\pi}{2}\right);$$

et si l'on désigne par δI, l'erreur dont elle susceptible, on aura en même temps

$$\delta I < \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2m} H A_m.$$

En supposant $h = 0,6$, et s'arrêtant à $m = 3$, on trouve qu'on peut prendre pour H, le nombre 40; et si l'on substitue, en outre, pour π et A_3 leurs valeurs numériques, il

vient

$$\delta I < \frac{0,01987}{n^6}.$$

Soit ensuite $n=4$; la valeur approchée de I sera

$$I = 0,9927799272;$$

à quoi il faudra joindre

$$\delta I < 0,0000048311;$$

de sorte que l'erreur sera moindre qu'une demi-unité décimale du 6e ordre. Elle est, en effet, plus petite; car en calculant, par les méthodes particulières aux transcendantes elliptiques, une valeur de I exacte jusqu'aux décimales du 14e ordre inclusivement, M. Legendre a trouvé qu'elle ne différait de la précédente que d'une demi-unité du 10e ordre.

Il est à remarquer que dans ce même exemple, la série des différences, contenue dans la formule (9), n'est pas convergente; et qu'en y ayant égard, on s'écarte plus de la valeur exacte de E, qu'en s'en tenant à la seule partie ωP_n de cette formule.

(10) Si l'on supprime en entier dans l'équation (6), la série des différentielles de fx, il faudra ajouter à son second membre la valeur de R_m qui répond à $m=0$. Je fais passer cette quantité dans le premier membre, et je suppose qu'on ait $c=\infty$, ce qui change ωP_n en une série infinie; il en résulte cette transformation d'une série dans une autre :

$$\int^{\infty} fx\,dx + 2\sum_{1}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty}\cos.\frac{2i\pi x}{\omega}fx\,dx\right) = \tfrac{1}{2}f0 + \sum_{1}^{\infty} fi\omega, \quad (10)$$

en déduisant l'expression de R_0, de la formule (7). Mais pour que cette nouvelle formule soit utile, il faudra l'appliquer à des cas dans lesquels les intégrations relatives à x puissent s'effectuer sous forme finie.

Si nous prenons, par exemple,

$$fx = e^{-x^2} \cos. 2ax,$$

e désignant la base des logarithmes népériens, et a une constante donnée, nous aurons

$$2\int_0^\infty \cos. \frac{2i\pi x}{\omega} fx\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-\left(a+\frac{i\pi}{\omega}\right)^2} + e^{-\left(a-\frac{i\pi}{\omega}\right)^2}\right];$$

d'où nous conclurons

$$\sqrt{\pi}\,\Sigma e^{-\left(a+\frac{i\pi}{\omega}\right)^2} = \omega\,\Sigma e^{-i^2\omega^2} \cos. 2ia\omega;$$

les sommes Σ s'étendant actuellement à toutes les valeurs de i, entières, positives, négatives ou zéro, depuis $i=-\infty$ jusqu'à $i=\infty$. Cette équation est identique dans le cas de $a=0$ et $\omega=\sqrt{\pi}$. En faisant $\omega=\sqrt{\pi}$, $a=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$, et, pour abréger, $e^{-\pi}=\varepsilon$, on en déduit

$$\Sigma \varepsilon^{\left(\frac{1}{2}+i\right)^2} = \Sigma(-1)^i \varepsilon^{i^2},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \varepsilon^{\frac{9}{4}} + \varepsilon^{\frac{25}{4}} + \varepsilon^{\frac{49}{4}} + \text{etc.} = \frac{1}{2} - \varepsilon + \varepsilon^4 - \varepsilon^9 + \text{etc.};$$

équation entre les deux transcendantes e et π, qui mérite

d'être remarquée, quoiqu'elle ne soit pas sous forme finie, et qu'il ne semble pas qu'on puisse l'y ramener.

(11) Soit encore

$$fx=\frac{\cos. ax}{b^2+x^2};$$

a et b étant des constantes que nous regarderons comme positives. On aura, par les formules connues,

$$\int_0^\infty \frac{2\cos. 2i\pi x \cos. ax}{b^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2b}\left(e^{\mp b(2i\pi-a)}+e^{-b(2i\pi+a)}\right); \quad (11)$$

le signe supérieur ou le signe inférieur ayant lieu dans la première exponentielle, selon que l'on a $a <$ ou $> 2i\pi$, afin que son exposant soit toujours négatif. D'après cela, si l'on désigne par $2n\pi$, le plus grand multiple de 2π qui soit contenu dans a, il faudra prendre le premier signe, lorsqu'on aura $i>n$, et le second, dans le cas de $i=n$ ou $<n$.

En partageant la somme $\sum_1^\infty$ en deux autres, dont l'une soit prise depuis $i=1$ jusqu'à $i=n$, et l'autre depuis $i=n+1$ jusqu'à $i=\infty$, et sommant les progressions géométriques qui en résulteront, on en conclura

$$\sum_1^\infty\int_0^\infty \frac{2\cos. 2i\pi x\cos. ax}{b^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2b}\,\frac{e^{-b(2\pi+2n\pi-a)}+e^{-b(2\pi+a)}}{1-e^{-2\pi b}}$$
$$+\frac{\pi}{2b}\,\frac{e^{b(2\pi-a)}-e^{b(2\pi+2n\pi-a)}}{1-e^{2\pi b}}.$$

On a d'ailleurs

$$\int_0^\infty \frac{\cos. ax}{b^2+x^2}=\frac{\pi}{2b}e^{-ab}\,dx; \quad (12).$$

si donc on prend $\omega=1$, la formule (10) deviendra, toute réduction faite,

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\pi\left[e^{-b(a-2n\pi-\pi)}+e^{b(a-2n\pi-\pi)}\right]}{2b\left(e^{\pi b}-e^{-\pi b}\right)}= \\ \dfrac{1}{2b^2}+\dfrac{\cos. a}{b^2+1}+\dfrac{\cos. 2a}{b^2+4}+\dfrac{\cos. 3a}{b^2+9}+\text{etc.}\end{array}\right\} \quad (13)$$

En différentiant cette équation par rapport à a, on en déduit cette autre :

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\pi\left[e^{-b(a-2n\pi-\pi)}-e^{b(a-2n\pi-\pi)}\right]}{2\left(e^{\pi b}-e^{-\pi b}\right)}= \\ \dfrac{\sin. a}{b^2+1}+\dfrac{2\sin. 2a}{b^2+4}+\dfrac{3\sin. 3a}{b^2+9}+\text{etc.}\end{array}\right\} \quad (14)$$

Au moyen du nombre n qu'elle renferme, l'équation (13) subsiste pour toutes les valeurs réelles et positives de a, parce qu'en effet, les équations (11) et (12) dont nous sommes partis, ont lieu sans exception. Mais il n'en est pas de même à l'égard de leurs différentielles par rapport à a, et pour cette raison, l'équation (14) est en défaut quand a est zéro ou un multiple de 2π.

Pour la rendre applicable à ces valeurs particulières, j'observe qu'en différentiant l'équation (12), et faisant ensuite $a=0$, on aurait

$$\int_0^\infty \frac{x \sin. ax}{b^2+x^2}dx=\frac{1}{2}\pi,$$

tandis que cette intégrale est évidemment nulle ; dans le cas de $a=0$, il faut donc retrancher du premier membre de

l'équation (14), le terme $\frac{1}{2}\pi$ qu'il renferme de trop ; ce qui le réduit effectivement à zéro, comme le second membre. Dans le cas de $a=2n\pi$ et $i=n$, la différentielle de l'équation (11) par rapport à a, donnerait

$$\int_0^\infty \frac{2x\cos.2n\pi x\sin.2n\pi x}{b^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2}\left(1+e^{-4n\pi b}\right);$$

au lieu que la valeur exacte de cette intégrale est seulement $\frac{1}{2}\pi e^{-4n\pi b}$; d'où il résulte que pour la valeur particulière $a=2n\pi$, le premier membre de l'équation (14) renferme aussi un terme $\frac{1}{2}\pi$ qui ne devrait pas s'y trouver : en l'en retranchant, ce premier membre devient nul en même temps que le second.

Les équations (11) et (12), ainsi que leurs différentielles, et, par conséquent, les formules (13) et (14) qui en dérivent, subsistent encore quand on y remplace b par $g+b\sqrt{-1}$; g et b étant des quantités réelles, dont la première est positive, mais aussi petite que l'on voudra. Après cette substitution, si l'on suppose que la partie g devienne infiniment petite, et qu'on la supprime en conséquence, on aura

$$\frac{\pi\cos.b(a-2n\pi-\pi)}{2b\sin.\pi b}=\frac{1}{2b^2}+\frac{\cos.a}{b^2-1}+\frac{\cos.2a}{b^2-4}+\frac{\cos.3a}{b^2-9}+\text{etc.},$$

$$\frac{\pi\sin.b(a-2n\pi-\pi)}{2\sin.\pi b}=\frac{\sin.a}{b^2-1}+\frac{2\sin.a}{b^2-4}+\frac{3\sin.3a}{b^2-9}+\text{etc.}$$

Toutes les formules de ce n° étaient déja connues. Elles se trouvent dans les ouvrages d'Euler et de M. Legendre, et aussi dans mes Mémoires sur les intégrales définies qui font partie du Journal de l'École Polytechnique. On en déduit facilement tous les résultats que l'on a trouvés jusqu'à

4.

présent, et, vraisemblablement, tout ce qu'il est possible d'obtenir, sur les séries de sinus et de cosinus, et sur celles des puissances négatives des nombres naturels.

(12) Soit que l'on forme la valeur exacte d'une intégrale définie ou qu'on la calcule par approximation, il faut avoir égard aux observations suivantes par lesquelles nous terminerons ce Mémoire.

1°. Lorsque l'une des limites de l'intégrale est infinie, la fonction fx comprise sous le signe $\int$, doit décroître à mesure qu'elle s'en approche, et devenir nulle à cette limite. Cela est nécessaire pour que la partie ωP_n de la formule (6), qui se change alors en une suite infinie, soit une série convergente. Néanmoins on a souvent employé des intégrales de fonctions périodiques, prises depuis zéro jusqu'à l'infini; mais les valeurs qu'on leur assigne ne sauraient se vérifier numériquement, ni être données par la formule (6); et l'on doit ne les considérer que comme des limites d'autres intégrales pour lesquelles la fonction fx était décroissante et convergente vers zéro. C'est ainsi qu'en désignant par a une constante réelle et qui ne soit pas nulle, on a

$$\int_0^\infty \cos. a x d x = 0, \quad \int_0^\infty \sin. a x d x = \frac{1}{a},$$

en regardant ces résultats comme les limites de ceux-ci :

$$\int_0^\infty e^{-gx} \cos. a x d x = \frac{g}{g^2 + a^2}, \quad \int_0^\infty e^{-gx} \sin a x d x = \frac{a}{g^2 + a^2},$$

dans lesquels g est une constante positive, aussi petite qu'on

voudra, et que l'on fait infiniment petite pour passer aux intégrales précédentes. La première peut encore être considérée comme la limite de l'une ou l'autre de celles-ci :

$$\int_0^\infty e^{-g^2x^2}\cos. ax\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2g}e^{-\frac{a^2}{4g}},$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos. ax}{1+g^2x^2}dx=\frac{\pi}{2g}e^{-\frac{a}{g}},$$

qui s'accordent aussi à donner zéro pour valeur de cette intégrale, à la limite où l'on suppose la quantité g infiniment petite, en exceptant toujours le cas où l'on aurait $a=0$.

A cause de cette exception, si les intégrales que nous citons pour exemples, sont comprises sous d'autres signes $\int$, relatifs à a, il faudra avoir soin de les remplacer par celles dont elles sont les limites. Ainsi, en désignant par $\mathrm{F}a$ et $\mathrm{F}'a$ deux fonctions données de a, si l'on a

$$\int \mathrm{F}a\left(\int_0^\infty \cos. ax\,dx\right)da,\ \int \mathrm{F}'a\left(\int_0^\infty \sin. ax\,dx\right)da,$$

l faudra prendre

$$\int\frac{g\mathrm{F}a\,da}{g^2+a^2},\quad \int\frac{a\mathrm{F}'a\,da}{g^2+a^2},$$

et ne faire la constante g infiniment petite qu'après avoir effectué les intégrations relatives à a, lorsque leurs limites comprendront $a=0$. Soit, par exemple,

$$\mathrm{F}a=\cos. a,\quad \mathrm{F}'a=\sin. a;$$

et intégrons depuis $a=-\infty$ jusqu'à $a=\infty$. Nous aurons πe^{-g} pour la valeur commune aux deux intégrales, laquelle se réduira à π, à la limite où la quantité g est infiniment petite. On peut vérifier que π est, en effet, la véritable valeur de chaque intégrale double, en effectuant les intégrations dans un ordre inverse, c'est-à-dire, en commençant par a et et finissant par x, ce qui n'est sujet à aucune difficulté; ou bien encore, en intégrant d'abord par rapport à x, entre des valeurs indéterminées de cette variable, qu'on ne fera infinies qu'après l'intégration relative à a.

2°. On ne doit pas faire usage de la formule (6), quand la fonction fx passe une ou plusieurs fois par l'infini, entre les limites de l'intégration. Le principe qui en est la base, et l'équation (2) dont nous l'avons déduite, supposent essentiellement que fx est toujours une quantité finie. Si cependant cette fonction devenait infinie à raison d'un diviseur dont l'exposant serait moindre que l'unité, il serait facile de le faire disparaître par un changement de variable. Supposons, par exemple,

$$fx=\frac{Fx}{(x-a)^k};$$

a étant une constante comprise entre les limites de l'intégration, k un exposant >0 et <1, et Fx une fonction qui ne devient pas infinie : on fera alors

$$(x-a)^{1-k}=y, \qquad (1-k)(x-a)^{-k}dx=dy;$$

d'où l'on conclura

$$fx\,dx=\frac{F'y}{1-k}dy;$$

$F'y$ étant aussi une fonction qui ne deviendra pas infinie, ce qui permettra d'appliquer la formule (6) à l'intégrale relative à la nouvelle variable y.

Généralement, une intégrale $\int_0^c fx\,dx$ cesse de représenter la somme des valeurs réelles de la différentielle, comprises depuis $x=0$ jusqu'à $x=c$, lorsque fx devient infinie dans cet intervalle. Ainsi, l'on a, par exemple,

$$\int_0^c \frac{dx}{x-a} = \log.\frac{a-c}{a}, \quad \int_0^c \frac{dx}{(x-a)^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a-c};$$

et si l'on suppose $a > 0$ et $< c$, la première valeur est imaginaire, et la seconde négative, tandis que la première différentielle est toujours réelle, et la seconde toujours positive. Mais dans ces sortes de cas, si l'on fait passer la variable, entre les limites données, par des valeurs imaginaires qui ne rendent plus fx infinie, on pourra considérer de nouveau l'intégrale $\int_0^c fx\,dx$, comme la somme des valeurs imaginaires de $fx\,dx$. Dans les exemples précédents, il faudra faire

$$x=\tfrac{1}{2}c(1-\cos.z+\sin.z\sqrt{-1}),\quad dx=\tfrac{1}{2}c(\sin.z+\cos.z\sqrt{-1}),$$

et intégrer depuis $z=0$ jusqu'à $z=(2n+1)\pi$, n étant un nombre entier quelconque, afin de ne pas changer les limites données $x=0$ et $x=c$. Les intégrales définies ne changeront pas non plus; mais les fonctions de z, comprises sous les signes $\int$, ne devenant pas infinies, chaque intégrale sera

maintenant la somme des valeurs de la différentielle; et ces valeurs étant imaginaires, cela explique comment leur somme peut être imaginaire dans un cas et négative dans l'autre.

Il y a aussi des intégrales dans lesquelles la fonction fx passe une infinité de fois par l'infini, et qu'on peut encore admettre dans l'analyse en les considérant comme les limites d'autres intégrales qui n'ont pas cet inconvénient. C'est dans cette classe qu'on doit ranger celles dont M. Bidone a donné les valeurs dans les Mémoires de Turin pour l'année 1812 (1).

3°. Lorsque fx renferme un radical, il devra conserver le même signe, ou plus généralement, avoir pour facteur la même racine de l'unité, dans toute l'étendue de l'intégration; et de cette manière, l'intégrale aura le même nombre de valeurs différentes, réelles ou imaginaires, dont le radical sera susceptible. Si le radical passe du réel à l'imaginaire, les signes dont il sera affecté dans ces deux périodes de valeurs, n'auront pas de dépendance mutuelle, et la valeur de l'intégrale sera nécessairement ambiguë, c'est-à-dire, qu'après avoir donné un signe déterminé à la partie réelle, on pourra supposer indifféremment que la partie imaginaire soit multipliée par $+\sqrt{-1}$ ou par $-\sqrt{-1}$: il est inutile d'insister sur cette circonstance qu'il suffit d'avoir indiquée. Lorsque le radical sera constamment réel entre les limites de l'intégration, la nécessité d'un signe constant, sera une condition essentielle qui influera sur l'expression de l'intégrale définie. Pour en donner un exemple connu, considérons l'intégrale :

---

(1) Voyez aussi sur ce point les *Exercices de calcul intégral*, tome II, page 125.

$$\int_0^\pi \frac{\sin. x dx}{\sqrt{1-2a\cos. x+a^2}},$$

dans laquelle a est une constante positive ; et convenons de regarder le radical contenu sous le signe $\int$, comme une quantité positive dans toute l'étendue de l'intégration. Il faudra prendre pour sa valeur, $1+a$ à la limite $x=\pi$, et $1-a$ ou $a-1$ à la limite $x=0$, selon qu'on aura $a<1$ ou $a>1$. D'après cela, on trouve ces deux expressions différentes :

$$\int_0^\pi \frac{\sin. x dx}{\sqrt{1-2a\cos. x+a^2}}=2, \quad \text{ou} =\frac{2}{a};$$

la première ayant lieu dans le cas de $a<1$, et la seconde dans le cas de $a>1$; et si l'on différentie cette intégrale par rapport à a, on aura, dans les mêmes cas, cet autre exemple :

$$\int_0^\pi \frac{(a-\cos. x)\sin. x dx}{(1-2a\cos. x+a^2)^{\frac{3}{2}}}=0, \quad \text{ou} =\frac{2}{a^2}.$$

Il est à remarquer que si l'on fait $a=1$, les deux valeurs de la première intégrale sont égales, mais non pas celles de la seconde. Dans ce cas particulier, la dernière intégrale a pour valeurs zéro ou 2, selon qu'auparavant on regardait a comme plus petit, ou comme plus grand que l'unité. Ce paradoxe tient à ce que les deux valeurs que l'on détermine de cette manière, sont celles qui répondent à la différence $1-a$ infiniment petite, positive ou négative, et qu'à cette limite, un changement infiniment petit dans la valeur de $1-a$, suffit pour produire un changement brusque dans

celle de l'intégrale dont il est question. Dans le cas où l'on aurait rigoureusement $a=1$, la valeur de cette intégrale serait la moyenne des deux valeurs précédentes, ou égale à l'unité; et, en effet, on a, dans cette hypothèse,

$$\int_0^\pi \frac{(a-\cos. x)\sin. x\,dx}{(1-2a\cos. x+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\pi \frac{\sin. x\,dx}{\sqrt{1-\cos. x}}=1.$$

Au reste, il existe beaucoup d'autres intégrales définies, renfermant, comme celle-ci, une constante sous le signe $\int$, qui ont des valeurs différentes, selon que cette constante est positive ou négative, bien qu'elle puisse être infiniment petite. C'est ainsi qu'on a, par exemple,

$$\int_0^\infty \frac{\sin. \alpha x}{x}\,dx=\tfrac{1}{2}\pi,\ =0,\ \text{ou}=-\tfrac{1}{2}\pi,$$

selon que la constante α est >0, $=0$, ou <0.